Université Paris-Diderot Année 2013-2014
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Problèmes d'examen - Analyse de la variable réelle

Exercice 1 (Examen 2013)**.** Soient A et B deux réels. On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 2Ax, & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{B^2}{1+x^2}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Expliquer pour quelle(s) valeur(s) de A et B, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Expliquer pour quelle(s) valeur(s) de A et B, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Examen 2012)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f. Calculer sa dérivée.
2. Étudier la limite de f en 0 puis définir $f(0)$ pour obtenir un prolongement par continuité de f en 0.
3. Étudier alors la dérivabilité de f en 0.
4. Calculer $I = f(\mathbb{R}_+)$. Pourquoi I est-il nécessairement un intervalle ?
5. On note g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser le domaine de définition de g^{-1}.
6. Étudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} ; g^{-1} est-elle dérivable en 0 ? (justifier votre réponse).
7. Calculer $g(1)$ puis déterminer la valeur de la dérivée de g^{-1} en $\frac{1}{e}$.

Exercice 3 (Examen 2012)**.** On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} - e^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Rappeler la définition exacte (en termes de ϵ) de la formule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$.
   En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :
   $\forall\, x \in]c, +\infty[\ f(x) \leq 1$.
3. Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

   $$\begin{cases} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) \quad \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   où y_0 est un réel que l'on précisera.
4. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, c[$ tel que : $\forall\, x \in [0, c] \qquad g(x) \leq g(x_0)$. En déduire à l'aide de la question 2 que f est majorée sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que $f(2) > 0$. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, en déduire que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]0, 2]$.

Exercice 4 (Examen 2011)**.** 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, donner la définition exacte (à l'aide d'un réel $\epsilon > 0$) de la limite : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \ln(x^2) \quad \text{pour tout réel } x \neq 0. \end{cases}$$

3. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 2x + \frac{\pi}{4} - \arctan x.$$

   (a) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$; puis calculer $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)$.

   (b) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur l'intervalle I que l'on déterminera ; puis vérifier que l'application réciproque f^{-1} est continue sur I.

   (c) Montrer que l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur I et calculer sa dérivée en tout point $y = f(x) \in I$, où $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 5 (Examen 2011)**.** 1. Donner la définition exacte (en termes de ϵ) de la formule : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

   (a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8}$.

   (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - 1\right)$.

3. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour tout } x \neq 0. \end{cases}$$

   Puis calculer sa dérivée f' et étudier la continuité de f' sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Examen 2011)**.** 1. Rappeler les énoncés du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème du maximum.

2. Existe-t-il une application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0, +\infty[) = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$?

3. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 7 (Partiel 2011)**.** Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + e^x}{3x^3 + 1}$.

2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

3. $\lim_{x\to 0^+} x \ln\left(\sqrt{1 + x} - 1\right)$.

Exercice 8 (Examen 2011)**.** On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = e^x + e^{-x} + 2$.

1. La fonction F est-elle paire ou impaire ? Justifier votre réponse.
2. Après avoir justifié la continuité et la dérivabilité de F, étudier ses variations. Puis, déterminer $\lim_{x \to -\infty} \frac{F(x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

On note f la restriction de F à l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Montrer que l'application f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[4, +\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1} : [4, +\infty[\to [0, +\infty[$ est continue.
4. Montrer que l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur $[4, +\infty[$. Est-elle dérivable en 4 ?
5. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'(x) = \sqrt{f(x)\,(f(x) - 4)}$.
6. En déduire que la dérivée $\left(f^{-1}\right)'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y > 4$:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\sqrt{y(y-4)}}.$$

Exercice 9 (Partiel 2011)**.** On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$f(0) = 0$ et $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Étudier $\lim_{x \to 0} f(x)$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Donner, en le justifiant, un tableau des variations de f.
3. Déterminer, en le justifiant, si f est injective.
4. Déterminer, en le justifiant, si f est surjective.
5. Soit $A = [-1, 2]$. Calculer $f(A)$ puis $f^{-1}f(A)$ et comparer les ensembles A et $f^{-1}\left(f(A)\right)$.
6. Donner un exemple d'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ (N.B. l'ensemble d'arrivée) telle que pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $g^{-1}\left(g(A)\right) = A$ (sans démonstration).

Exercice 10 (Examen 2010)**.** Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + x - 2})$.
2. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 2x - 3}$.
3. $\lim_{x \to +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 11 (Examen 2010)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f en justifiant les résultats obtenus. Calculer les valeurs prises par f en $1, 2$ et 3. Dessiner l'allure de son graphe.
2. On note g la restriction de f à $[1, +\infty[$. Montrer que $g([1, +\infty[)$ est un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ où α est un réel que l'on précisera.
3. Montrer que g est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[\alpha, +\infty[$ et que l'application réciproque g^{-1} : $[\alpha, +\infty[\to [1, +\infty[$ est continue et strictement monotone.
4. Montrer que l'application g^{-1} est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ est elle dérivable en α ?
5. Déterminer les valeurs de la dérivée de g^{-1} en 2 et en 18.

Exercice 12 (Examen 2010)**.** Justifier les réponses aux questions suivantes :

1. Existe-t-il une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0,1]) = [0,1] \cup [2,3]$?
2. Existe-t-il une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et surjective ?
3. Existe-t-il une application $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et telle que $f(]0,1[) = [0,1]$?

Exercice 13 (Examen 2010)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + e^x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. On note g la bijection réciproque de f. Donner le tableau de variations de g avec ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Que peut-on dire de la continuité et de la dérivabilité de g ?
4. Déterminer $g'(1)$.

Exercice 14. On considère la fonction d'une variable réelle $f(x) = \dfrac{(\sin x)\sqrt[5]{x^2+1}}{\sqrt{x}}$.

1. Préciser l'ensemble de définition I de f et montrer que f est continue sur I.
2. Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que f est bornée sur I et atteint ses bornes.

Exercice 15 (Examen 2008)**.** Soit f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f se prolonge par continuité au point 0 en une fonction φ que l'on précisera.
3. Montrer que φ est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de φ.
4. Étudier, au voisinage de 0, la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.

Exercice 16 (Examen 2008)**.** 1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose : $F_n(x) = \exp(-nx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Dessiner approximativement, dans un même repère, les graphes de F_1 et de F_2.

   (b) On considère l'application :

$$G_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F_n(x) - x. \end{array}$$

   Montrer qu'elle est bijective.

   (c) Montrer que l'équation $x = \exp(-nx)$ a une unique solution x_n.
   Montrer que : $x_n > 0$.

Exercice 17 (Question de cours – Partiel 2007)**.** 1. Étant donnée une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quelle est la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$?

2. Que peut-on dire de l'image d'un segment $[a,b]$ par une application continue ?

Exercice 18 (Examen 2008)**.** On pose : $f(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1}{(\ln x)^2}$ quand $x > 0$ avec $x \neq 1$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité au point 1 en une fonction $\widetilde{f}$; que vaut $\widetilde{f}(1)$?.
2. La fonction $\widetilde{f}$ est-elle dérivable au point 1 ? Si oui, que vaut $\widetilde{f}'(1)$?